

---

# Didaktik der Bruchrechnung

# Überblick

- I. Einleitung
- II. Für und Wider der Bruchrechnung
- III. Bruchzahlaspekte
- IV. Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

# I. Einleitung

- Bruchzahl (Bruch):  $\mathbb{B} = \mathbb{Q}_+ \setminus \{0\}$   
Menge der positiven rationalen Zahlen  
Schreibweisen:
  - gemeiner Bruch
  - Dezimalbruch
  - Potenzsätze
  - Verhältnisse

B58

3

Weitere Bedeutung kommt den Begriffen: echter und unechter Bruch zu.

PF: Bruch, wofür steht die Bezeichnung? Wer verwendet ihn an welcher Stelle und muss dabei was beachten?

# I. Einleitung

- Bruchzahl (Bruch):  $\mathbb{B} = \mathbb{Q}_+ \setminus 0$   
Menge der positiven rationalen Zahlen
- Stammbruch: Bruch mit dem Zähler 1
- Kernbruch: Bruch, der nicht weiter kürzbar ist
- Zehnerbruch: Bruch mit Zehnerpotenz im Nenner

4

Gemeiner Bruch als weiterer Begriff.

PF: Woher kommt die Bezeichnung ‚gemein‘? A: allgemein

## II. Für und Wider der Bruchrechnung

- Argumente gegen die Bruchrechnung
  1. Irrelevanz für das tägliche Leben
  2. Relikt aus längst vergangener Zeit
  3. Bequeme Spielwiese für Lehrer
  4. Mehr Zeit für Dezimalbrüche
  5. Zwei Schreibweisen für Bruchzahlen
  6. Brüche als Selektionsinstrument

P6-8

5

1. Fragt man beliebige Mitmenschen wird man sehr häufig zu hören bekommen, dass sie mit nur sehr wenigen Brüchen auskommen (Merkbrüche).
2. Es gibt schon seit Jahrhunderten ein effizienteres System, das vielmehr Gebrauch findet. Warum schreibt man nicht in den bequemeren Dezimalbrüchen. Vgl. Römisches Zahlensystem - Stellenwertsystem
3. Für den Lehrer sehr praktisch und ohne viel Aufwand zu unterrichten, da es große Aufgabekataloge und Unterrichtskonzepte gibt.
4. Man beschäftigt sich über ein halbes Jahr nur mit der Bruchrechnung in Klasse 6. Sollte man nicht diese Zeit für die viel mehr gebräuchlichen Dezimalzahlen nutzen?
5. Nur bei den Brüchen nutzt man zwei Schreibweisen parallel, obwohl das eine viel praktischer ist.
6. Wenn man sie nur braucht, um Schüler sitzen zu lassen oder später bei Einstellungstest durchfallen zu lassen, dann kann man die Bruchrechnung doch wohl abschaffen.

Beachte: Unterschied zwischen Alltag und Mathematikunterricht. Nicht alles was im MU behandelt wird, findet eine Eins zu Eins Umsetzung im Alltag.

## II. Für und Wider der Bruchrechnung

- Argumente für die Bruchrechnung
  1. Brüche sind anschauliche Fundierung der Dezimalbruchrechnung
  2. Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne Bruchrechnung?
  3. Lösbarkeit von Gleichungen / Gleichungslehre
  4. Zahlenbereichserweiterung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{Q}_+$
  5. Bruchrechnung und Algebra

P8-16

6

Da ich glaube, dass die Bruchrechnung und deren ausführlich Behandlung nicht überflüssig und überholt ist, möchte ich auf einige der genannten Aspekte mittels einfacher Beispiel etwas genauer eingehen.

1. Brüche mit kleinem Nenner lassen sich viel einfacher als Bruch vorstellen. Man kann sie durch handeln herstellen (falten, schneiden). Man befindet sich somit auf der **enaktiven Ebene** des Wissenserwerbs. Was soll sich der Schüler unter 0,3333.. Oder 0,625 vorstellen. (genauer beim Bruchzahlaspekt)
2. Man denke nur an den Additions- bzw. Multiplikationssatz und der Veranschaulichung mit Hilfe des Urnen Modells.
3. Wie löst ein Schüler die Gleichung  $3x = 2$  ??
4. Einführung der Division ohne Rest. Wie möchte man das inverse Element eines Dezimalbruchs finden? Bruch:  $a/b \cdot b/a = 1$

PF: Was bedeutet, dass die Bruchschreibweise genauer ist? A: Darstellungsmöglichkeit bestimmter Zahlen wie  $1/3$ .

### III. Bruchzahlaspekte

- Teil vom Ganzen
- Maßzahl
- Operator
- Verhältnis
- Quotient
- Lösung von Gleichungen
- Skalenwert
- Quasikardinalität

P 35-40

7

Für die Behandlung der Bruchzahlen und der Vermittlung in Schule ist es notwendig, sich mit den Verschieden Aspekten der Bruchrechnung zu beschäftigen. Sonst besteht die Gefahr, dass man nur Regeln oder Formalismen anwendet, die sehr fehleranfällig sind.

Ich möchte die einzelnen Aspekte nur kurz an einem Bsp. benennen und bei den einzelnen Konzepten genauer drauf eingehen.

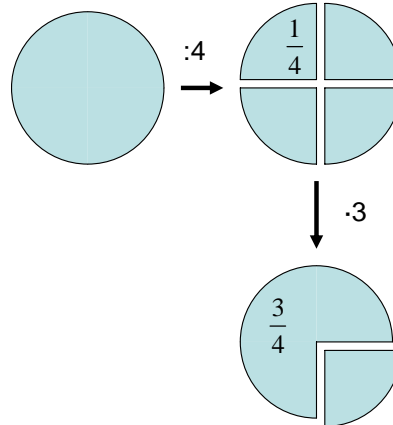
P: Beachte für die Prüfung die Unterscheidung von Bruch und Bruchrechnung!!!

### III. Bruchzahlaspekte

- **Teil vom Ganzen**

- Maßzahl
- Operator
- Verhältnis
- Quotient
- Lösung von Gleichungen
- Skalenwert
- Quasikardinalität

- **Teil eines Ganzen**



P 41

8

Der Aspekt des Teil vom Ganzen lässt sich gut in zwei Teilaspekte einteilen. Der erste und für die Schüler am leichtesten zu Verstehende ist der des Teil eines Ganzen.

Konkret auftretende Brüche lassen sich gut auf der enaktiven Ebene durch das Teilen von Streifen oder Ähnlichem erarbeiten. Hierbei zeigen Schüler durchaus viele Kreative Lösungsmöglichkeiten (nach Winter).

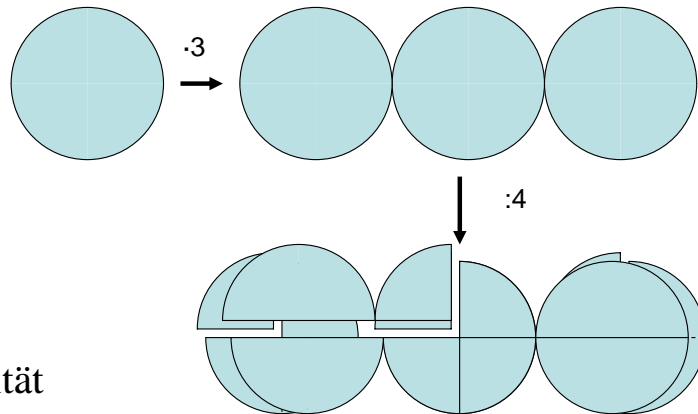


### III. Bruchzahlaspekte

- **Teil vom Ganzen**

- Maßzahl
- Operator
- Verhältnis
- Quotient
- Lösung von Gleichungen
- Skalenwert
- Quasikardinalität

- **Teil mehrerer Ganzer**



P 44

9

Der Aspekt des Teils mehrerer Ganzer bildet den zweiten Schritt bei der Schaffung einer Grundvorstellung.

Dies wird sehr schnell bei der Betrachtung konkreter Gegenstände deutlich. Hier ist das Beispiel der Pizzenbestellung von drei Pizzen und vier Personen zu nennen. Im Unterricht sollte man auch versuchen nicht den einfachen Weg zu gehen dies verbessert das Verständnis bei den Schülern.

Problem: Nicht alle Dinge lassen sich gerecht teilen.

Problem: Gleichwertigkeit beider Grundvorstellungen: Es ist nicht Selbstverständlich, dass  $(e/n) \cdot m = (e \cdot m)/n$  und beides durch den Bruch benannt werden dürfen.

### III. Bruchzahlaspekte

- Teil vom Ganzen
- **Maßzahl**
- Operator
- Verhältnis
- Quotient  $\frac{1}{2}$  Stunde,  $\frac{3}{4}$  kg oder  $\frac{1}{4}$  km
- Lösung von Gleichungen
- Skalenwert
- Quasikardinalität

P 35

10

Brüche werden zur Bezeichnung von Größen eingesetzt, wie beispielsweise bei  $\frac{1}{2}$  Stunde,  $\frac{3}{4}$  kg oder  $\frac{1}{4}$  km.

Der Aspekt der Maßzahl ist sehr eng mit dem des Teil vom Ganzen verknüpft.

### III. Bruchzahlaspekte

- Teil vom Ganzen
- Maßzahl
- **Operator**
- Verhältnis
- Quotient
- Lösung von Gleichungen
- Skalenwert
- Quasikardinalität

Gib mir ein Drittel von  
12 Äpfeln.

Wie viel ist die Hälfte  
von  $\frac{3}{8}$  Liter Milch?

P 35

11

Brüche werden nur knappen Beschreibung von auf Größen anzuwendender Multiplikation benutzt. Beispiele sind die beiden folgenden Aussagen:

### III. Bruchzahlaspekte

- Teil vom Ganzen
- Maßzahl
- Operator
- **Verhältnis**
- Quotient
- Lösung von Gleichungen
- Skalenwert
- Quasikardinalität

I: Die schwarzen Perlen verhalten sich zu den weißen Perlen wie 1:2.

II: Ein Drittel der Perlen ist schwarz, zwei Drittel sind weiß.

P 35-40

12

Verhältnisse spielen im alltäglichen Leben eine große Rolle. Wir benutzen sie bei Wahrscheinlichkeiten, Maßstäben und Spielergebnissen oder bei Formatangaben.

P. Führt das Beispiel einer Perlenkette an, die immer im Wechsel zwei weiße und eine schwarze Perle hat. Die Zusammensetzung der Kette lässt sich mit Brüchen wie auch mit Verhältnissen beschreiben.

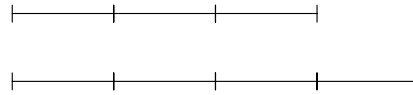
I Verhältnis

II Bruch

### III. Bruchzahlaspekte

- Teil vom Ganzen
- Maßzahl
- Operator
- Verhältnis
- **Quotient**
- Lösung von Gleichungen
- Skalenwert
- Quasikardinalität

$$3:4 = \frac{3}{4}$$



P 35-40

13

Brüche dienen zum Beschreiben von Ergebnissen von Divisionsaufgaben im Sinne des Verteilens von Größen. Wie z.B. das Verteilen von 3 Äpfeln auf vier Personen ohne Rest.

Oder der Beschreibung von Ergebnissen im Sinne des Messens. Bsp. Wie oft passt die 4m lange Strecke in die 3m lang hinein?

### III. Bruchzahlaspekte

- Teil vom Ganzen
- Maßzahl
- Operator
- Verhältnis
- Quotient
- **Lösung von Gleichungen**
- Skalenwert
- Quasikardinalität

$$3 \cdot x = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{3}$$

P 35-40 M5

14

Einer der wohl wichtigsten Aspekte ist das Lösen von Gleichungen.

Hier zeigt sich gleich eine der besonderen Stärken der Bruchschreibweise.  $\frac{7}{3}$  kann einfach aufgeschrieben werden, die Dezimalschreibweise kann dies nicht.

### III. Bruchzahlaspekte

- Teil vom Ganzen
- Maßzahl
- Operator
- Verhältnis
- Quotient
- Lösung von Gleichungen
- **Skalenwert**
- Quasikardinalität



P 35-40

15

### III. Bruchzahlaspekte

- Teil vom Ganzen
  - Maßzahl
  - Operator
  - Verhältnis
  - Quotient
  - Lösung von Gleichungen
  - Skalenwert
  - **Quasikardinalität**
- $\frac{3}{4} \rightarrow 3 \text{ Viertel}$
- vergleiche
- 3 Äpfel

P 35-40

16

Dieser Aspekt bezieht sich auf eine Analogie zwischen den Natürlichen Zahlen als Kardinalzahl und den in einer speziellen Schreibweise notierten Bruchzahlen.

Schreiben wir z.B.  $\frac{3}{4}$  in der Form 3 Viertel, so haben wir eine Analogie zum Einsatz der 3 als Kardinalzahl 3 Äpfel.



## IV. Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

- I. Das Größenkonzept
- II. Das Äquivalenzkonzept
- III. Das Operatorkonzept
- IV. Das Gleichungskonzept

P 17-31

17

Für die Gestaltung eines Gesamtkonzeptes der Darstellung der Bruchrechnung gibt es nach Padberg 4 Konzepte. Diese sind die Antwort auf die Frage: *Was ist eine Bruchzahl?*

Antworten: Eine Bruchzahl ist:

- Eine Größe
- Eine Äquivalenzklasse
- Die Lösung einer lin. Gleichung
- Eine Funktion (Operator)

Die Unterscheidung der Konzepte sind idealtypisch. Im Mathematikunterricht lassen sich diese K. nicht so getrennt voneinander behandeln. Darauf gehe ich im Anschluss auf die Vorstellung der Konzepte ein.

P: Achtung: diese Aspekte beziehen sich sowohl auf die Einführung von Brüchen wie auf die Bruchrechnung.

## IV. Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

### I. Das Größenkonzept

Ausgangspunkt sind konkrete Brüche:

$$\frac{1}{2} \text{ Stunde} \quad \frac{1}{8} \text{ kg} \quad \frac{3}{4} \text{ km}$$

durch Abstraktion erhält man eine feste Größe Bezugsgröße:  
das *Ganze* oder die *Einheit E*

$$\frac{m}{n} E \quad m, n \in \mathbb{N} \setminus 0$$

P 17-31

18

Es zeigt sich gleich zu Beginn der größte Vorteil dieses Konzeptes. Es holt die Schüler bei dem an, was sie aus ihrem Alltag kennen. Es ist sehr anschaulich und kann die von Bruner geforderten Ebenen des Erkenntnisgewinns verfolgen:

Enaktiv – Handeln, selber Teile

Ikonisch – durch Anschauung z.B. von Bildern, Grafiken

Symbolisch – Verwendung von Umgangssprache und mathematischer Zeichensprache

## IV. Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

### I. Das Größenkonzept

$$\frac{m}{n}E \quad m, n \in \mathbb{N} \setminus 0$$

#### Vorteile:

- Nähe zum täglichen Leben
- Anknüpfung an Vorwissen
- Leichtes Verständnis für
  - a) Erweitern und Kürzen
  - b) Addieren

Bsp:  $\frac{1}{2}$  Pizza +  $\frac{1}{2}$  Pizza

#### Nachteil:

- Bedeutung der Multiplikation?  
 $\frac{1}{2}$  Pizza  $\cdot$   $\frac{1}{2}$  Pizza = ???
- Division eliminiert die Größe
- Keine Methodengleichheit  
nat. Zahl  $\rightarrow$  Bruch

P 17-31

19

P: Anknüpfen an Vorkenntnisse:

Ist bei diesem Konzept die Schreibweise mit bedacht?

Wie kommt man in Schule zu der Darstellung als Bruch?

Warum versagt das Größenkonzept bei der Multiplikation?

Welche Alternativen gibt es?

## IV. Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

### II. Das Äquivalenzklassenkonzept

Ausgangspunkt ist die Einführung einer Relation:

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

„ $\sim$ “ eine Äquivalenzrelation, die eine Einteilung der Menge der geordneten Paare nat. Zahlen bewirkt,

Bruchzahlen sind Äquivalenzklassen und Brüche sind ihre Repräsentanten

P 17-31

20

P: Wie kann das  $\sim$  für die Erweiterung der nat. Zahlen auf die Ganzen genutzt werden? A: Def. über die Addition!

$$(a,b) \sim (c,d) \rightarrow a+d=b+c$$

## IV. Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

### II. Das Äquivalenzklassenkonzept

$$\text{Addition: } \frac{m}{n} + \frac{p}{q} := \frac{m \cdot q + p \cdot n}{n \cdot q}$$

$$\text{Multiplikation: } \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} := \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

P 17-31

21

Ä~ ist für Mathematiker gut, ist es das auch für Schule??

## IV. Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

### II. Das Äquivalenzklassenkonzept

#### Vorteile:

- mathematisch richtig
- für die gesamte Bruchrechnung geeignet
- Kürzen und Erweitern sind klar von den Rechenoperationen getrennt

#### Nachteile:

- fehlende Alltagsbezug
- fehlende Veranschaulichung
- „willkürliche“ Einführung der Addition und Multiplikation

P 17-31

22

Anderer Begriff für Operator? A: Funktion.

Vergleiche Einführung der Funktion als Abbildung!

## IV. Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

### III. Das Operatorkonzept

Ausgangspunkt ist die Einführung einer Operation:

Zuordnung als Operator: Größe  $\rightarrow$   $\frac{2}{3}$  Größe

-Unterscheidung von Zustand und Operator

Bsp: Zustand: 5

Operator: addiere 2                      Zustand: 7

Operator: subtrahiere 1                  Zustand: 6

Operator: multipliziere 3                Zustand: 21

P 17-31 D 15-19

23

Analog werden Operatoren für die Bruchrechnung eingeführt. Sie wirken wie eine Art Maschine.

Bsp:  $\frac{2}{3}$  Maschine: Ein Stab beliebiger Länge wird in diese Maschine eingegeben und man bekommt einen heraus, der genau  $\frac{2}{3}$  der vorgehenden Länge hat.

Soweit ist dies für Schüler nachvollziehbar, was ist jedoch bei der Multiplikation?

Hier zeigt sich das größte Problem dieses Konzeptes, es ist für Schüler der 5-6 Klasse nicht nachvollziehbar.

## IV. Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

### III. Das Operatorkonzept

#### Vorteile:

- mathematisch richtig
- methodischer Aufbau ist möglich

#### Nachteile:

- fehlende Alltagsbezug
- Addition und Subtraktion nur schwer verständlich
- inhaltliche Vorstellungen gehen verloren
- Bedeutung des Operator ist für Schüler nicht erkennbar



## IV. Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

### IV. Das Gleichungskonzept

Ausgangspunkt ist der Bruch als Lösung der Gleichung:

$$n \cdot x = m \quad \Rightarrow \quad L = \frac{m}{n}$$

Erweitern und Kürzen erfolgen als Umformung der Gleichung:

$$\frac{3}{4} \quad 4 \cdot x = 3 \quad | \cdot 2$$
$$\frac{6}{8} \quad 8 \cdot x = 6$$

P 17-31 D 15-19

25

Analog werden Operatoren für die Bruchrechnung eingeführt. Sie wirken wie eine Art Maschine.

Bsp:  $\frac{2}{3}$  Maschine: Ein Stab beliebiger Länge wird in diese Maschine eingegeben und man bekommt einen heraus, der genau  $\frac{2}{3}$  der vorgehenden Länge hat.

Soweit ist dies für Schüler nachvollziehbar, was ist jedoch bei der Multiplikation?

Hier zeigt sich das größte Problem dieses Konzeptes, es ist für Schüler der 5-6 Klasse nicht nachvollziehbar.

## IV. Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

### IV. Das Gleichungskonzept

$$n \cdot x = m \Rightarrow L = \frac{m}{n}$$

Addition:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} \quad 4 \cdot x = 3 \quad | \cdot 3 \quad 12 \cdot x = 9 \\ \frac{1}{3} \quad 3 \cdot y = 1 \quad | \cdot 4 \quad 12 \cdot y = 4 \end{array} \right\} 12(x + y) = 13 \quad \frac{13}{12}$$

P 17-31 D 15-19

26

Analoge Einführung der Multiplikation.

Problem: Division ist komplizierter / Lösung über Inverses

## IV. Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

### IV. Das Gleichungskonzept

#### Vorteile:

-leichte Einführung des Erweitern und Kürzen

-gut verständliche Addition und Multiplikation

#### Nachteile:

-fehlende Alltagsbezug / formal

-Existenz einer Lösung wird vorausgesetzt

-Fehlen der Betrachtung der Rechengesetze